8П

УДК 681.324

В.А. Павский, К.В. Павский
Кемеровский технологический институт, Кемерово, Россия
pavvm@kemtipp.ru
Институт физики полупроводников СО РАН, Новосибирск, Россия
pkv@isp.nsc.ru

Расчет показателей осуществимости решения задач набора на распределенных вычислительных системах*

Предлагается подход к расчету показателей осуществимости решения задач набора, характеризующих функционирование ВС в среднем. В его основе лежат вероятностные процессы теории массового обслуживания. Полученные формулы обладают наглядностью и могут быть использованы при ручном счете.

Введение

При анализе эффективности функционирования вычислительных систем (ВС), как сосредоточенных, так и распределенных, используются показатели осуществимости [1], [2]. В зависимости от сложности задач и характера их поступления выделяют следующие режимы работы ВС:

- решение сложной задачи;
- обработка набора задач;
- обслуживание потока задач.

Целью работы является разработка подхода к расчету математических ожиданий и дисперсий показателей осуществимости решения задач набора.

Постановка задачи

Рассмотрим решение i сложных задач набора на ВС. Сложная задача (представлена параллельной программой [2]) решается на всем выделенном ресурсе [3].

Пусть выделенный ресурс составляет n ЭМ, тогда интенсивность решения задачи будем считать равной $n \cdot \beta$, где β – интенсивность решения задачи на одной ЭМ (оцениваются потенциальные возможности ВС [1], [2]).

Так как задачи сложные, то решаются последовательно, поскольку каждая из них решается на всех ЭМ. Предполагается, что поток событий для параметра β пуассоновский.

Требуется вычислить математическое ожидание $A_i(t)$ – числа задач, находящихся в системе [2], и соответствующую дисперсию $D_i(t)$ в момент времени $t \in [0, \infty)$ при начальных условиях:

$$A_i(0) = i\,,\ D_i(0) \equiv 0\,,\ i \in E_0^{\infty} = 0,1,2,... \qquad (1)$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №07-07-00142, №08-08-00300) и Совета по грантам Президента РФ (грант №НШ-2121.2008.9)

Расчет показателей осуществимости решения задач набора на ВС

Обозначим через $P_k(t)$ вероятность того, что к моменту времени t в ВС находится k задач (включая обслуживаемую), $k \in E_0^i$.

В такой постановке имеем систему [3]

$$\begin{cases} P_k'(t) = -n \cdot \beta \cdot P_k(t) + n \cdot \beta \cdot P_{k+1}(t), \ k \in E_1^{i-1}; \\ P_0'(t) = n \cdot \beta \cdot P_1(t); \quad P_i'(t) = -n \cdot \beta \cdot P_i(t), \end{cases} \tag{2}$$

с начальными условиями

$$P_i(0) = 1, \ P_k(0) = 0, \ k \neq i.$$

Условие нормировки, являющееся следствием системы уравнений, имеет вид

$$\sum_{k=0}^{i} P_k(t) = 1, \ t \in [0, \infty).$$

Вводя производящую функцию

$$F(z,t) = \sum_{k=0}^{n} z^k \cdot P_k(t),$$

систему (2) приводим к уравнению

$$z \cdot \frac{\partial F(z,t)}{\partial t} = n \cdot \beta \cdot (1-z) \cdot (F(z,t) - P_0(t)), \ F(z,0) = z^i, \tag{3}$$

из которого, после необходимых преобразований, получаем систему

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} A_i(t) = -n \cdot \beta \cdot (1 - P_0(t)), \\ \frac{d}{dt}\left[D_i(t) + A_i^2(t) + A_i(t)\right] = -2n \cdot \beta \cdot A_i(t) \end{cases} \tag{4}$$

с начальными условиями (1).

Вероятность $P_0(t)$ неизвестна, однако, если число i задач велико, то можно считать, что $i \to \infty$, то $P_0(t) \to 0$, $t \in [0, \infty)$. Система (4) имеет очевидное решение

$$\begin{cases} A_i(t) = i - n \cdot \beta \cdot t, \\ D_i(t) = n \cdot \beta \cdot t, \quad (t < i / n \cdot \beta), \end{cases} \tag{5}$$

где $A_i(t)$ – среднее число задач, оставшихся в системе к моменту времени t.

Из (5) следует, что среднее время, необходимое для решения i сложных задач набора, $t_{cp} = i / (n\,\beta)$ при стандартном отклонении $\sigma = \sqrt{i}$. Например, при выделенном ресурсе $n = 100$ ЭМ, время, необходимое для решения набора из 400 задач, при $\beta = 0{,}1$ 1/ч составит $t_{cp} = 400 / (100 \cdot 0{,}1) = 40$ ч. С учетом отклонения, $\sigma = \sqrt{400} = 20$, получаем $t_{cp} = 20 / (100 \cdot 0{,}1) = 2$ ч. Таким образом, для среднего времени решения набора задач с учетом стандартного отклонения имеем: $\tilde{t}_{cp} = 40 \pm 2$ ч.

Замечание. Точное решение системы (4) слишком громоздко. Именно поэтому решение (5), при указанных упрощениях, оправдано [4]. Приведем решение системы (2).

Применяя преобразование Лапласа ($\widetilde{f}(s)=\int_0^{\infty} e^{-s\cdot t}\cdot f(t)dt$, где $f(t)$ – функция ограниченного изменения [5] к уравнению (3), получим

$$z\cdot s\cdot \widetilde{F}(z,s)-z^i=n\cdot\beta\cdot(1-z)\cdot(\widetilde{F}(z,s)-\widetilde{P}_0(s)),\ \mathrm{Re}(s)>0 \qquad (6)$$

Или

$$\widetilde{F}(z,s)=\frac{z^{i+1}-n\cdot\beta\cdot(1-z)\cdot\widetilde{P}_0(s)}{s\cdot z-n\cdot\beta\cdot(1-z)}. \qquad (7)$$

Так как в знаменателе $|z|=\left|n\cdot\beta/(s+n\cdot\beta)\right|<1$, то применяя теорему Руше [5], находим

$$\widetilde{P}_0(s)=s^{-1}\cdot[n\cdot\beta/(s+n\cdot\beta)]^i. \qquad (8)$$

Подставляя правую часть формулы (8) в (7) и разделив полученный числитель на знаменатель, будем иметь

$$\widetilde{F}(z,s)=s^{-1}\cdot[n\cdot\beta/(s+n\cdot\beta)]^i+\sum_{k=0}^{i-1}z^{i-k}\cdot[n\cdot\beta/(s+n\cdot\beta)]^k. \qquad (9)$$

Взяв обратное преобразование Лапласа, предварительно разложив правую часть (9) на простейшие множители, получим

$$F(z,t)=1-\exp(-n\cdot\beta\cdot t)\cdot\sum_{k=1}^{i}(n\cdot\beta\cdot t)^{i-k}/(i-k)!+\exp(-n\cdot\beta\cdot t)\cdot\sum_{k=0}^{i-1}z^{i-k}\cdot(n\cdot\beta\cdot t)^k/k!$$

Учитывая, что

$$P_k(t)=\frac{1}{k!}\cdot\frac{\partial^k}{\partial z^k}F(0,t),$$

находим искомое решение

$$P_0(t)=1-\exp(-n\cdot\beta\cdot t)\cdot\sum_{k=0}^{i-1}\frac{(n\cdot\beta\cdot t)^k}{k!},$$

$$P_k(t)=\frac{(n\cdot\beta\cdot t)^{i-k}}{(i-k)!}\cdot\exp(-n\cdot\beta\cdot t),\ k\in E_1^i.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} A_i(t)=\exp(-n\cdot\beta\cdot t)\cdot\sum_{k=1}^{i}k\cdot\frac{(n\cdot\beta\cdot t)^{i-k}}{(i-k)!}, \\ D_i(t)=\exp(-n\cdot\beta\cdot t)\cdot\sum_{k=1}^{i}k^2\cdot\frac{(n\cdot\beta\cdot t)^{i-k}}{(k-i)!}-(A_i(t))^2. \end{cases}$$

Погрешность решения в сравнении с (5) для $A_i(t)$

$$\Delta_i(t)=\exp(-n\cdot\beta\cdot t)\cdot\sum_{k=i+1}^{\infty}(k-i)\cdot\frac{(n\cdot\beta\cdot t)^k}{k!}.$$

Заметим, что $P_0(t)$ представлена распределением Эрланга порядка *i*, для которого

$$M\xi=i/(n\cdot\beta),\ D\xi=i/(n\cdot\beta)^2,$$

где ξ – полное время нахождения последней обслуженной задачи в наборе, что вполне согласуется с решением (5).

Заключение

Предложен подход к расчету показателей осуществимости решения задач набора, характеризующих функционирование ВС в среднем. В его основе лежат вероятностные процессы теории массового обслуживания. Предложенный подход позволяет вычислять моменты (центральные и начальные) любых порядков, не вычисляя вероятности состояний системы, что особенно важно для анализа функционирования многомашинных ВС. Полученные формулы обладают наглядностью и могут быть использованы при ручном счете.

Литература

1. Евреинов Э.В., Хорошевский В.Г. Однородные вычислительные системы. – Новосибирск: Наука, 1978.
2. Хорошевский В.Г. Архитектура вычислительных систем. – М.: МГТУ им. Баумана, 2005. – 512 с.
3. Павский В.А., Павский К.В., Хорошевский В.Г. Вычисление показателей живучести распределенных вычислительных систем и осуществимости решения задач // Искусственный интеллект. – 2006. – № 4. – С. 28-34.
4. Павский В.А., Хорошевский В.Г., Павский К.В. Вычисление показателей осуществимости решения задач на вычислительных системах // Материалы VII Междунар. науч.-техн. конф. «Искусственный интеллект. Интеллектуальные и многопроцессорные системы – 2006». – Кацивели (Крым, Украина). – Изд-во ТРТУ, 2006. – Т. 2. – С. 14-17.
5. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. – М.: Мир, 1979. – 600 с.

В.О. Павський, К.В. Павський

Розрахунок показників здійсненності розв’язання задач набору на розподілених обчислювальних системах

Пропонується підхід до розрахунку показників здійсненності розв’язання задач набору, що характеризують функціонування ОС в середньому. У його основі лежать процеси вірогідності теорії масового обслуговування. Одержані формули володіють наочністю і можуть бути використані при ручному рахунку.

Valery A. Pavsky, Kirill V. Pavsky

Calculation of Realizability Parameters of Set Solving Problems on Distributed Computer systems

The approach to calculation of realizability parameters of set solving problems is offered. The approach is based on the probabilistic processes of queueing theory. Obtained formulas are obvious and can be used for hand computations.

Статья поступила в редакцию 21.07.2008.